

第 11 章 因式分解

11.1 因式分解



刷基础

1. **B** 【解析】A 选项, $m(a+b) = ma+mb$ 中等号

右边不是积的形式, 故不符合题意; B 选项, $a^2b+ab^2=ab(a+b)$ 符合因式分解的定义, 故符合题意; C 选项, $3x^2-3x+1=3x(x-1)+1$ 中等号右边不是积的形式, 故不符合题意; D 选项, $(x+1)(x-1)=x^2-1$ 中等号右边不是积的形式, 故不符合题意. 故选 B.

2. **B** 【解析】 $6x^2y=2x \cdot 3xy$ 中等号左边是单项式, 故甲不是因式分解; $a+1=a\left(1+\frac{1}{a}\right)$ 中 $\frac{1}{a}$ 不是整式, 故乙不是因式分解. 故选 B.

3. 【解】(1) 不是因式分解.

(2) 不是因式分解.

(3) 是因式分解.

(4) 不是因式分解.

(5) 不是因式分解.

4. **A** 【解析】因为 $(2m+5n)(2m-5n)=4m^2-25n^2$, 所以“?”是 $25n^2$. 故选 A.

5. 【解】因为 $(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$, 小明看错了 b , 所以 $a=6$. 因为 $(x-1)(x-9)=x^2-10x+9$, 小张看错了 a , 所以 $b=9$, 所以 $a=6, b=9$.

6. 【解】(1) 因为 $(x-3)(x+a)=x^2-3x+ax-3a=x^2+(a-3)x-3a=x^2-7x+12$, 所以 $a-3=-7, -3a=12$, 解得 $a=-4$.

(2) 因为 $(2x+3)(x-2)=2x^2+3x-4x-6=2x^2-x-6=2x^2+bx-6$, 所以 $b=-1$.

(3) 设另一个因式为 $(a'x^2+b'x+c)$, 则 $2x^3+x^2+kx-3=(2x-1)(a'x^2+b'x+c)$.

对比等式左右两边三次项系数可得 $a'=1$, 于是 $2x^3+x^2+kx-3=(2x-1)(x^2+b'x+c)$,

则 $2x^3+x^2+kx-3=2x^3-x^2+2b'x^2-b'x+2cx-c=2x^3+(2b'-1)x^2+(2c-b')x-c$, 所以 $-c=-3, 2b'-1=1, 2c-b'=k$, 解得 $c=3, b'=1, k=5$. 故另一个因式为 x^2+x+3, k 的值为 5.

11.2 提公因式法



刷基础

1. **B** 【解析】A 选项, $5xy$ 和 xy^5 的公因式是 xy , 故本选项不符合题意; B 选项, $5x-y$ 和 $x+5y$

刷有所得

要判断一个式子从左到右的变形是不是因式分解, 只需看变形是否把一个多项式化成几个整式乘积的形式.

关键点拨

(3) 设出另一个因式为 $(a'x^2+b'x+c)$, 对比等式左右两边三次项系数可得 $a'=1$, 再参照题干给出的方法计算即可.

没有公因式, 故本选项符合题意; C 选项, $5x-5y$ 和 $6x-6y$ 的公因式是 $x-y$, 故本选项不符合题意; D 选项, $5x$ 和 $15y$ 的公因式是 5, 故本选项不符合题意. 故选 B.

2. **B** 【解析】多项式 $2x^m y^{n-1}-4x^{m-1} y^n$ (m, n 均为大于 1 的整数) 各项的公因式是 $2x^{m-1} y^{n-1}$, 故选 B.

3. $2b(a-b)$ 【解析】 $6ab(a-b)^2$ 与 $4b^2(a-b)$ 的公因式是 $2b(a-b)$. 故答案为 $2b(a-b)$.

4. **C** 【解析】A 选项, $12abc-9a^2b^2=3ab(4c-3ab)$, 故选项 A 不符合题意; B 选项, $3x^2y-3xy+6y=3y(x^2-x+2)$, 故选项 B 不符合题意; C 选项, $-a^2+ab-ac=-a(a-b+c)$, 故选项 C 符合题意; D 选项, $x^2y+5xy-y=y(x^2+5x-1)$, 故选项 D 不符合题意. 故选 C.

5. **D** 【解析】 $(a+b-c)(a+c-b)+(b-a+c)(b-a-c)=(a+b-c)(a+c-b)-(b-a+c)(a+c-b)=(a+c-b)[(a+b-c)-(b-a+c)]=(a-b+c) \cdot (a+b-c-b+a-c)=2(a-c) \cdot (a-b+c)$. 故选 D.

6. **B** 【解析】因为长、宽分别为 a, b 的长方形周长为 16, 面积为 12, 所以 $a+b=\frac{16}{2}=8, ab=12$, 所以 $a(a+b)(a-b)-a(a+b)^2=a(a+b)[(a-b)-(a+b)]=a(a+b)(-2b)=-2ab(a+b)=-2 \times 12 \times 8=-192$. 故选 B.

7. **B** 【解析】 $2\ 023 \times 2\ 024-2\ 023^2=2\ 023 \times (2\ 024-2\ 023)=2\ 023 \times 1=2\ 023$, 故选 B.

8. **-2** 【解析】 $(x+2)(3x-2)+(x+2)=(x+2)(3x-2+1)=(x+2)(3x-1)$. 因为多项式 $(x+2)(3x-2)+(x+2)$ 可以因式分解为 $(x+m)(3x+n)$, 所以 $m=2, n=-1$, 所以 $mn=2 \times (-1)=-2$. 故答案为 -2.

9. **-2 025** 【解析】因为 $x^2-2x-1=0$, 所以 $x^2-2x=1$, 所以 $2x^3-7x^2+4x-2\ 022=2x^3-4x^2-3x^2+4x-2\ 022=2x(x^2-2x)-3x^2+4x-2\ 022=2x \cdot 1-3x^2+4x-2\ 022=-3x^2+6x-2\ 022=-3(x^2-2x)-2\ 022=-3-2\ 022=-2\ 025$, 故答案为 -2 025.

10. 【解】(1) 原式 $=-8x(3m^2+2n^2)$.

(2) 原式 $=3a^2(m-2na+1)$.

(3) 原式 $= 2a(x-y) + 6b(x-y) = 2(x-y)(a+3b)$.

(4) 原式 $= (x-y)^3 - 2(x-y)^2 = (x-y)^2(x-y-2)$.

(5) 原式 $= (x+y)(x-y)[(x+y)-(x-y)] = 2y(x+y)(x-y)$.

11. 【解】(1) 题中分解因式的方法是提公因式法,共用了 2 次,故答案为提公因式法,2.

(2) $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^{2021} = (1+x)[1+x+x(x+1)+\cdots+x(x+1)^{2020}] = \cdots = (1+x)^{2022}$, 故答案为 $(1+x)^{2022}$.

(3) $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^n = (1+x)[1+x+x(x+1)+\cdots+x(x+1)^{n-1}] = (1+x)^2[1+x+x(x+1)+\cdots+x(x+1)^{n-2}] = \cdots = (1+x)^{n+1}$.

11.3 公式法

课时 1 用平方差公式进行因式分解

刷基础

1. B 【解析】 $64-x^2 = (8-x)(8+x)$, 故选 B.

2. B 【解析】A 选项, $y^2-49x^2 = (y+7x)(y-7x)$, 可以用平方差公式分解因式, 不符合题意; B 选项, $-\left(\frac{1}{49}+x^4\right) = -\frac{1}{49}-x^4$, 不具有平方差公式的特点, 不可以用平方差公式分解因式, 符合题意; C 选项, $\frac{1}{4}(p+q)^2-9 = \left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q+3\right)\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q-3\right)$, 可以用平方差公式分解因式, 不符合题意; D 选项, $-m^4+n^2 = (n+m^2)(n-m^2)$, 可以用平方差公式分解因式, 不符合题意. 故选 B.

3. $(x+3y)(y-x)$ 【解析】原式 $= (2y+x+y)(2y-x-y) = (x+3y)(y-x)$, 故答案为 $(x+3y)(y-x)$.

4. $2x(x+2)(x-2)$ 【解析】 $2x^3-8x = 2x(x^2-4) = 2x(x+2)(x-2)$.

5. 【解】(1) $(x+y)(x-y)-(y-x)^2 = (x+y)(x-y)-(x-y)^2 = (x-y)(x+y-x+y) = 2y(x-y)$.
(2) $a^4-16 = (a^2+4)(a^2-4) = (a^2+4)(a+2)(a-2)$.

6. A 【解析】因为 $(n+11)^2-n^2 = (n+11+n)(n+11-n) = 11(2n+11)$, 所以 $(n+11)^2-n^2$ 的值总可以被 11 整除, 即 $k=11$. 故选 A.

7. 200 【解析】由题意得, $\begin{cases} a+b=20, \\ a-b=10, \end{cases}$ 所以 $a^2-b^2 = (a+b)(a-b) = 20 \times 10 = 200$. 故答案为 200.

8. 10 000 【解析】因为 $m-n=-100$, 所以 $m^2-n^2+200n = (m+n)(m-n)+200n = -100(m+n)+200n = -100m-100n+200n = 100n-100m = 100(n-m) = 100 \times 100 = 10\ 000$. 故答案为 10 000.

9. 【解】因为 $R=10.25\text{ cm}, r=8.25\text{ cm}$, 所以题图(2)中阴影部分的面积为 $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r) = \pi(10.25+8.25) \cdot (10.25-8.25) = 18.5 \times 2\pi = 37\pi (\text{cm}^2)$.
答: 题图(2)中阴影部分的面积为 $37\pi\text{ cm}^2$.

易错错

10. 【解】不正确. 因为因式分解不彻底. 正确求解过程如下:

原式 $= a(x^4-81) = a(x^2+9)(x^2-9) = a(x^2+9)(x+3)(x-3)$.

刷提升

1. C 【解析】原式 $= (x^2-y^2)(a^2-b^2) = (x-y)(x+y)(a-b)(a+b)$, 所以由题意可知结果呈现的密码信息可能是爱我廊坊. 故选 C.

2. B 【解析】原式 $= \left(1-\frac{1}{5}\right) \times \left(1+\frac{1}{5}\right) \times \left(1-\frac{1}{6}\right) \times \left(1+\frac{1}{6}\right) \times \left(1-\frac{1}{7}\right) \times \left(1+\frac{1}{7}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{99}\right) \times \left(1+\frac{1}{99}\right) \times \left(1-\frac{1}{100}\right) \times \left(1+\frac{1}{100}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \cdots \times \frac{98}{99} \times \frac{100}{99} \times \frac{99}{100} \times \frac{101}{100} = \frac{4}{5} \times \frac{101}{100} = \frac{101}{125}$. 故选 B.

3. B 【解析】 $2^{48}-1 = (2^{24}+1)(2^{24}-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1) \times 65 \times 63$.

4. D 【解析】原式 $= \frac{11 \times (65^2-35^2)}{n} = \frac{11 \times (65+35) \times (65-35)}{n} = \frac{11 \times 100 \times 30}{n} = \frac{11 \times 2^3 \times 3 \times 5^3}{n}$. A 选项, 当 $n=44$ 时, $44=2^2 \times 11$, 是 $11 \times 2^3 \times 3 \times 5^3$ 的因数, 可使结果为整数, 故此选项不符合题意; B 选项, 当 $n=55$ 时, $55=11 \times 5$, 是 $11 \times 2^3 \times 3 \times 5^3$ 的因数, 可使

易错警示
进行因式分解时, 一定要注意分解到不能再分解为止.

思路分析
计算得出原式 $= \frac{11 \times 2^3 \times 3 \times 5^3}{n}$, 将各选项代入, 逐一验证即可得解.

结果为整数,故此选项不符合题意;C选项,当 $n=66$ 时, $66=2 \times 3 \times 11$, 是 $11 \times 2^3 \times 3 \times 5^3$ 的因数,可使结果为整数,故此选项不符合题意;D选项,当 $n=77$ 时, $77=7 \times 11$, 不是 $11 \times 2^3 \times 3 \times 5^3$ 的因数,不可使结果为整数,故此选项符合题意. 故选 D.

5. $a < c < b$ 【解析】 $a = 19^2 \times 918 = 361 \times 918$, $b = 888^2 - 30^2 = (888 - 30) \times (888 + 30) = 858 \times 918$, $c = 698^2 - 220^2 = (698 + 220) \times (698 - 220) = 918 \times 478$, 所以 $a < c < b$.

6. 32 【解析】正方形 B 中空白部分的面积 $S_2 = b^2 - m$, 正方形 A 中空白部分的面积 $S_1 = a^2 - m$, 所以 $S_1 - S_2 = a^2 - m - (b^2 - m) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. 因为 $a + b = 8$, $a - b = 4$, 所以 $S_1 - S_2 = 8 \times 4 = 32$.

7. 16 【解析】因为 $x - 2y - 4 = 0$, 所以 $x - 2y = 4$, 所以 $x^2 - 4y^2 - 16y = (x + 2y)(x - 2y) - 16y = 4(x + 2y) - 16y = 4x - 8y = 4(x - 2y) = 4 \times 4 = 16$.

8. 【解】(1) $16a^2(a - b) + 4b^2(b - a) = 16a^2(a - b) - 4b^2(a - b) = (a - b)(16a^2 - 4b^2) = 4(a - b)(4a^2 - b^2) = 4(a - b)(2a - b)(2a + b)$.
(2) $25(m + n)^2 - 9(m - n)^2 = [5(m + n) - 3(m - n)][5(m + n) + 3(m - n)] = (5m + 5n - 3m + 3n)(5m + 5n + 3m - 3n) = (2m + 8n)(8m + 2n) = 4(m + 4n)(4m + n)$.

刷素养

9. 【解】(1) 假设两个连续奇数分别为 $2n - 1, 2n + 1$ (n 为正整数), 则 $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = (2n + 1 + 2n - 1)(2n + 1 - 2n + 1) = 4n \times 2 = 8n$.

当 $8n = 32$ 时, $n = 4$, 符合题意, 所以 32 是奇特数.

当 $8n = 2\ 022$ 时, $n = \frac{1\ 011}{4}$, 不是整数, 所以

2 022 不能表示为两个连续奇数的平方差的形式, 所以 2 022 不是奇特数.

综上, 32 是奇特数, 2 022 不是奇特数. 故答案为是, 不是.

(2) 是. 理由: 由(1)可知任何一个奇特数都可以表示成 $8n$ (n 为正整数), 显然 $8n$ 是 8 的倍数, 所以两个连续奇数构造的奇特数是 8 的倍数.

(3) $S_{\text{阴影部分}} = 199^2 - 197^2 + 195^2 - 193^2 + \cdots + 7^2 - 5^2 + 3^2 - 1^2 = (199 + 197)(199 - 197) + (195 + 193)(195 - 193) + \cdots + (7 + 5)(7 - 5) + (3 +$

刷有所得

能运用完全平方公式分解因式的多项式必须是三项式, 其中有两项能写成两个数(或式)的平方和的形式, 另一项是这两个数(或式)的积的 2 倍.

关键点拨

通过作差法判断 A 与 B 的大小关系.

$$1)(3-1) = (199+197+195+193+\cdots+3+1) \times 2 = \frac{(1+199) \times 100}{2} \times 2 = 20\ 000.$$

课时 2 用完全平方公式分解因式



刷基础

1. B 【解析】因为 $m^2 - 4 = (m + 2)(m - 2)$, $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$, 所以 $m^2 - 4$ 与 $m^2 - 4m + 4$ 的公因式为 $m - 2$, 故选 B.

2. D 【解析】当 $x^2 + 1$ 作为两个数(或式)的平方和的形式时, 加上的单项式可以是 $\pm 2x$; 当 x^2 作为两个数(或式)的积的 2 倍, 1 作为平方项时, 加上的单项式可以是 $\frac{1}{4}x^4$, 故选 D.

3. $2a(x - 2y)^2$ 【解析】 $2ax^2 - 8axy + 8ay^2 = 2a(x^2 - 4xy + 4y^2) = 2a(x - 2y)^2$.

4. -13 或 11 【解析】因为 $4x^2 - (k + 1)x + 9$ 能用完全平方公式因式分解, 所以 $k + 1 = \pm 12$, 解得 $k = -13$ 或 11.

5. 【解】(1) 原式 $= (2x - 1)^2$.

(2) 原式 $= -(3a - b)^2$.

(3) 原式 $= \left(2m - \frac{1}{2}n\right)^2$.

(4) 原式 $= -4(a + b)^2$.

6. 【解】(1) $a^3 - 4a^2b + 4ab^2 = a(a^2 - 4ab + 4b^2) = a(a - 2b)^2$.

(2) $18a^4x^2 + 24a^2x^2y + 8x^2y^2 = 2x^2(9a^4 + 12a^2y + 4y^2) = 2x^2(3a^2 + 2y)^2$.

(3) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$.

(4) $(x + y)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16(x - y)^2 = (x + y)^2 - 2 \cdot (x + y) \cdot 4(x - y) + [4(x - y)]^2 = [(x + y) - 4(x - y)]^2 = (-3x + 5y)^2$.

7. A 【解析】根据题意得 $x^2 - ax + 4 = b^2x^2 + 4bx + 4$, 所以 $b^2 = 1$, $-a = 4b$, 所以 $b = \pm 1$, $a = -4b$. 当 $b = 1$ 时, $a = -4$, $a + b = -3$; 当 $b = -1$ 时, $a = 4$, $a + b = 3$. 故选 A.

8. A 【解析】因为 $a + b = 3$, 所以 $2a^2 + 4ab + 2b^2 - 6 = 2(a + b)^2 - 6 = 2 \times 3^2 - 6 = 12$, 故选 A.

9. A 【解析】由题可知, 16 张卡片总面积为 $a^2 + 6ab + 9b^2$. 因为 $a^2 + 6ab + 9b^2 = (a + 3b)^2$, 所以大正方形的边长为 $a + 3b$. 故选 A.

10. A 【解析】因为 $A - B = (x^2 + 6y + 4) - (-y^2 + 2x - 6) = x^2 + 6y + 4 + y^2 - 2x + 6 = (x^2 - 2x + 1) +$

$(y^2+6y+9) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \geq 0$, 所以 $A \geq B$, 故选 A.

11. -6 【解析】因为 $a+b=-1, ab=-6$, 所以 $a^3b+2a^2b^2+ab^3 = ab(a^2+2ab+b^2) = ab(a+b)^2 = (-6) \times (-1)^2 = (-6) \times 1 = -6$, 故答案为 -6.

12. 【解】(1) 原式 $= (10.1 - 0.1)^2 = 10^2 = 100$.
(2) 原式 $= 202^2 + 2 \times 202 \times 98 + 98^2 = (202 + 98)^2 = 90\ 000$.

13. 【解】因为 $|a+4|$ 与 b^2+4b+4 互为相反数, 所以 $|a+4|+b^2+4b+4 = |a+4|+(b+2)^2 = 0$, 所以 $a+4=0, b+2=0$, 解得 $a=-4, b=-2$, 所以 $(x+a)(x+b)+1 = (x-4)(x-2)+1 = x^2-6x+8+1 = x^2-6x+9 = (x-3)^2$.

刷提升

1. C 【解析】②④⑤能用完全平方公式分解因式. 本题容易忽视②⑤, 注意②提出 $\frac{1}{2}$, ⑤提出 3 以后就能利用完全平方公式分解因式.

2. C 【解析】 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac = a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 = (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$. 因为 $a=m+2\ 022, b=m+2\ 023, c=m+2\ 024$, 所以 $a-b=m+2\ 022-m-2\ 023=-1, a-c=m+2\ 022-m-2\ 024=-2, b-c=m+2\ 023-m-2\ 024=-1$, 所以 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac = (-1)^2+(-2)^2+(-1)^2=6$, 故选 C.

3. A 【解析】 $x^2+y^2-2x-4y+6 = x^2-2x+1+y^2-4y+4+1 = (x-1)^2+(y-2)^2+1 \geq 1$, 所以该多项式的值总是正数.

4. $(2x+3y+3)(2x+3y-3)$ 【解析】 $4x^2+12xy+9y^2-9 = (4x^2+12xy+9y^2)-9 = (2x+3y)^2-3^2 = (2x+3y+3)(2x+3y-3)$. 故答案为 $(2x+3y+3)(2x+3y-3)$.

5. 【解】(1) 因为 $a^2+b^2-2a+1=0$, 所以 $a^2-2a+1+b^2=0$, 所以 $(a-1)^2+b^2=0$, 所以 $a-1=0, b=0$, 解得 $a=1, b=0$. 故答案为 1, 0.
(2) 因为 $x^2+2y^2-2xy+6y+9=0$, 所以 $x^2+y^2-2xy+y^2+6y+9=0$, 即 $(x-y)^2+(y+3)^2=0$, 所以 $x-y=0, y+3=0$, 解得 $x=-3, y=-3$, 所以 $x^y = (-3)^{-3} = -\frac{1}{27}$.

6. 【解】(1) ① $x^2+7x+12 = (x+3)(x+4)$.
② $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$.

关键点拨

根据“热门定理”分解因式, 原式加上再减去相同的项, 然后利用完全平方公式和平方差公式进行因式分解即可.

关键点拨

将 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac$ 变形为 $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$, 再求出 $a-b, a-c$ 和 $b-c$ 的值即可.

$(2) 4x^2-5x-6 = (4x+3)(x-2)$.

7. 【解】(1) 原式 $= 4x^4+y^4+4x^2y^2-4x^2y^2 = (2x^2+y^2)^2-4x^2y^2 = (2x^2+y^2+2xy)(2x^2+y^2-2xy)$.

(2) 原式 $= a^2-4am+4m^2-4m^2-n^2+4mn = (a^2-4am+4m^2)-(4m^2+n^2-4mn) = (a-2m)^2-(2m-n)^2 = (a-2m+2m-n)(a-2m-2m+n) = (a-n)(a-4m+n)$.

8. 【解】(1) 将 $x-y$ 看成整体, 令 $x-y=B$, 则原式 $= 1+4B+4B^2 = (1+2B)^2$. 再将 B 还原, 则原式 $= (1+2x-2y)^2$.

(2) 将 $a+b$ 看成整体, 令 $a+b=M$, 则原式 $= M(M-4)+4 = M^2-4M+4 = (M-2)^2$. 再将 M 还原, 则原式 $= (a+b-2)^2$.

(3) $(n+1)(n+2)(n^2+3n)+1 = (n^2+3n)[(n+1)(n+2)]+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$.

令 $n^2+3n=a$, 则上式 $= a(a+2)+1 = a^2+2a+1 = (a+1)^2$, 所以原式 $= (n^2+3n+1)^2$.

因为 n 为正整数, 所以 n^2+3n+1 为正整数, 所以 $(n^2+3n+1)^2$ 一定是某个整数的平方.

刷素养

9. 【解】(1) 设 $2\ 024-x=m, x-2\ 020=n$, 则 $(2\ 024-x)(x-2\ 020) = mn = 2, m+n = (2\ 024-x) + (x-2\ 020) = 4$, 所以 $(2\ 024-x)^2 + (x-2\ 020)^2 = m^2+n^2 = (m+n)^2-2mn = 4^2-2 \times 2 = 12$, 故答案为 12.

(2) 设 $x-2\ 021=c, x-2\ 024=d$, 则 $(x-2\ 021)^2 + (x-2\ 024)^2 = c^2+d^2 = 29, c-d = (x-2\ 021)-(x-2\ 024) = 3$, 所以 $(x-2\ 021) \cdot$

$(x-2\ 024) = cd = \frac{1}{2}[c^2+d^2-(c-d)^2] = \frac{1}{2} \times$

$(29-3^2) = \frac{1}{2} \times 20 = 10$.

(3) 由题意得, $DE=x-1, DF=x-3$. 因为长方形 $DEMF$ 的面积为 48, 所以 $(x-1)(x-3) = 48$. 设 $x-1=e, x-3=f$, 所以 $ef=48, e-f=x-1-(x-3)=2$, 所以 $(e+f)^2 = (e-f)^2+4ef = 4+4 \times 48 = 196$. 因为 $e+f>0$, 所以 $e+f=14$, 所以阴影部分的面积为 $(x-1)^2-(x-3)^2 = e^2-f^2 = (e+f)(e-f) = 14 \times 2 = 28$.

全章综合训练

刷中考

1. C 【解析】A 选项, $(a+3)^2 = a^2+6a+9$ 从左到右是整式的乘法, 不是因式分解, 故 A 选项错

误; B 选项, $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$, 故 B 选项错误; C 选项, $5ax^2 - 5ay^2 = 5a(x^2 - y^2) = 5a(x + y)(x - y)$, 故 C 选项正确; D 选项, $a^2 - 2a - 8 = (a + 2)(a - 4)$, 故 D 选项错误. 故选 C.

2. **A** 【解析】 $a^2 - 1 = a^2 - 1^2 = (a + 1)(a - 1)$, 故选 A.

3. **A** 【解析】原式 $= a(a^2 - 9) = a(a - 3)(a + 3)$, 故选 A.

4. **2a** 【解析】 $2a^2$ 与 $4ab$ 的公因式为 $2a$. 故答案为 $2a$.

5. **4x** (答案不唯一) 【解析】因为 $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$, 所以加上的单项式可以是 $4x$, 故答案为 $4x$ (答案不唯一).

6. **$(x + 3)^2$** 【解析】原式 $= x^2 + 4x + 2x + 8 + 1 = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

7. **$2m(x - y)^2$** 【解析】 $2mx^2 - 4mxy + 2my^2 = 2m(x^2 - 2xy + y^2) = 2m(x - y)^2$. 故答案为 $2m(x - y)^2$.

8. **B** 【解析】因为 $(2k + 3)^2 - 4k^2 = (2k + 3)^2 - (2k)^2 = (2k + 3 + 2k) \cdot (2k + 3 - 2k) = 3(4k + 3)$, k 为任意整数, 所以其值总能被 3 整除. 故选 B.

9. **D** 【解析】因为 $a + b = 3, ab = 1$, 所以 $a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 + 2ab + b^2) = ab(a + b)^2 = 1 \times 3^2 = 9$. 故选 D.

10. 【解】(1) $19^2 - 17^2 = 8 \times 9$.

(2) 由题意可得, $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n$.

(3) 因为 $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = [(2n + 1) + (2n - 1)][(2n + 1) - (2n - 1)] = (2n + 1 + 2n - 1)(2n + 1 - 2n + 1) = 4n \times 2 = 8n$,

所以 $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n$ 正确.

11. 【解】(1) 因为 $3m + n = \frac{b}{a}, mn = \frac{c}{a}$, 所以 $b = a(3m + n), c = amn$, 进而计算 $b^2 - 12ac$, 根据非负数的性质, 即可求解;

所以 $b = a(3m + n), c = amn$, 则 $b^2 - 12ac = [a(3m + n)]^2 - 12a^2mn = a^2(9m^2 + 6mn + n^2) - 12a^2mn = a^2(9m^2 - 6mn + n^2) = a^2(3m - n)^2$.

因为 a, m, n 是有理数, 所以 $a^2(3m - n)^2 \geq 0$, 所以 $b^2 - 12ac$ 为非负数.

(2) m, n 不可以都为整数.

理由如下: 若 m, n 都为整数, 其可能情况如下: ① m, n 都为奇数;

② m, n 为整数, 且其中至少有一个为偶数.

① 当 m, n 都为奇数时, $3m + n$ 必为偶数.

因为 $3m + n = \frac{b}{a}$, 所以 $b = a(3m + n)$.

思路分析

根据平方差公式分解因式后判断即可.

思路分析

(1) 根据题意得出 $b = a(3m + n), c = amn$, 进而计算 $b^2 - 12ac$, 根据非负数的性质, 即可求解;

(2) 分情况讨论, ① m, n 都为奇数; ② m, n 为整数, 且其中至少有一个为偶数, 根据奇偶数的性质结合已知条件分析即可.

因为 a 为奇数, 所以 $a(3m + n)$ 必为偶数, 这与 b 为奇数矛盾.

② 当 m, n 为整数, 且其中至少有一个为偶数时, mn 必为偶数.

因为 $mn = \frac{c}{a}$, 所以 $c = amn$. 因为 a 为奇数,

所以 amn 必为偶数, 这与 c 为奇数矛盾.

综上所述, m, n 不可以都为整数.



刷章测

1. **B** 【解析】A 选项, $a(x - y) = ax - ay$, 是整式的乘法, 故本选项不符合题意; B 选项, $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$, 是因式分解, 故本选项符合题意; C 选项, $x^2 - 4x + 3 = x(x - 4) + 3$, 等号的右边不是积的形式, 故本选项不符合题意; D 选项, $a^2 + 1$ 不能因式分解, 故本选项不符合题意. 故选 B.

2. **B** 【解析】A 选项, $16m^2 + 1 - 2 = 16m^2 - 1 = (4m + 1)(4m - 1)$, 故此选项不符合题意; B 选项, $16m^2 + 1 - 15m^2 = m^2 + 1$, 故此选项符合题意; C 选项, $16m^2 + 1 + 8m = (4m + 1)^2$, 故此选项不符合题意; D 选项, $16m^2 + 1 - 8m = (4m - 1)^2$, 故此选项不符合题意. 故选 B.

3. **A** 【解析】因为 $x^2 - mx + 42 = (x - n)(x - 7)$, 所以 $x^2 - mx + 42 = x^2 - (7 + n)x + 7n$, 所以 $7n = 42, 7 + n = m$, 所以 $n = 6, m = 13$. 故选 A.

4. **C** 【解析】题图(1)中的阴影部分的面积为 $ab - ax - bx + x^2$. 题图(2)中的阴影部分的面积为 $(a - x)(b - x)$, 故 $ab - ax - bx + x^2 = (a - x)(b - x)$. 故选 C.

5. **A** 【解析】因为 $a = x^2 + 2xy, b = 3xy + 6y^2$, 所以 $a \oplus b = 3a - 2b = 3(x^2 + 2xy) - 2(3xy + 6y^2) = 3x^2 + 6xy - 6xy - 12y^2 = 3x^2 - 12y^2 = 3(x^2 - 4y^2) = 3(x + 2y) \cdot (x - 2y)$, 故选 A.

6. **A** 【解析】 $1 - a - a(1 - a) - a(1 - a)^2 - a(1 - a)^3 - \dots - a(1 - a)^{2013} - [(1 - a)^{2014} - 3] = 1 - a - a(1 - a) - a(1 - a)^2 - a(1 - a)^3 - \dots - a(1 - a)^{2013} - (1 - a)^{2014} + 3 = (1 - a)^2 - a(1 - a)^2 - a(1 - a)^3 - \dots - a(1 - a)^{2013} - (1 - a)^{2014} + 3 = \dots = (1 - a)^{2013} - a(1 - a)^{2013} - (1 - a)^{2014} + 3 = (1 - a)^{2014} - (1 - a)^{2014} + 3 = 3$. 故选 A.

7. **A** 【解析】因为 $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2024$, 所以 $a^2(b + c) - b^2(a + c) = 0$, 所以 $a^2b + a^2c - ab^2 - b^2c = 0$, 所以 $ab(a - b) + c(a^2 - b^2) = 0$, 所以 $ab(a - b) + c(a + b)(a - b) = 0$, 所以 $(a -$

$b)(ab+ac+bc)=0$. 因为 $a \neq b$, 所以 $ab+ac+bc=0$, 即 $ab+bc=-ac$. 由 $b^2(a+c)=2\ 024$, 得 $b(ab+bc)=2\ 024$, 所以 $-abc=2\ 024$, 所以 $abc=-2\ 024$. 故选 A.

8. D 【解析】①因为 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, 所以 x^2+3x+2 能被 $x+1$ 整除, 说法正确; ②因为 x^2-4x-5 能被 $x+a$ 整除, 且 $x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$, 所以 $a=1$ 或 $a=-5$, 说法正确; ③因为 x^3+ax^2+bx-3 能被 x^2+2x+3 整除, 所以将整式 x^3+ax^2+bx-3 因式分解后, 有一个因式为 x^2+2x+3 , 设 $x^3+ax^2+bx-3=(x+c)(x^2+2x+3)$, 所以 $x^3+ax^2+bx-3=x^3+(c+2)x^2+(2c+3)x+3c$, 所以 $\begin{cases} c+2=a, \\ 2c+3=b, \\ 3c=-3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=1, \\ c=-1, \end{cases}$ 所以此说法正确. 综上所述, ①②③都正确, 即正确的个数为 3. 故选 D.

9. $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$ 【解析】 $16a^4-1=(4a^2)^2-1=(4a^2+1)(4a^2-1)=(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$.

10. -10 【解析】 $x^2+px+q=(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$, 则 $p=-2, q=-8$, 所以 $p+q=-2+(-8)=-10$. 故答案为 -10.

11. 25 【解析】 $\frac{100}{102^2-100 \times 104} = \frac{100}{102^2-(102-2)(102+2)} = \frac{100}{102^2-(102^2-2^2)} = \frac{100}{102^2-102^2+4} = \frac{100}{4} = 25$. 故答案为 25.

12. -1\ 012 【解析】因为 $(m-2\ 023)^2+(2\ 024-m)^2=2\ 025$, 所以 $[(m-2\ 023)+(2\ 024-m)]^2-2(m-2\ 023)(2\ 024-m)=2\ 025$, 所以 $1-2(m-2\ 023)(2\ 024-m)=2\ 025$, 所以 $1-2\ 025=2(m-2\ 023)(2\ 024-m)$, 所以 $(m-2\ 023)(2\ 024-m)=-1\ 012$, 故答案为 -1\ 012.

13. 【解】(1) $4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2$.

思路分析

根据因式分解与整式的乘法互为逆运算, 可将 $2(x-1) \cdot (x-9)$ 运用多项式的乘法法则展开, 进而求出 a 与 c 的值; 同理将 $2(x-2)(x-4)$ 运用多项式的乘法法则展开, 可求出 b 的值, 从而确定原多项式, 再将原多项式分解因式即可.

$$(2) a^3-16a=a(a^2-16)=a(a+4)(a-4).$$

$$(3) m^2(m-1)+4(1-m)=(m-1)(m^2-4)=(m-1)(m+2)(m-2).$$

$$(4) m^4-8m^2+16=(m^2-4)^2=(m+2)^2(m-2)^2.$$

14. 【解】(1) 这两个连续偶数构成的“神秘数”是 4 的倍数. 理由如下: $(2k+2)^2-(2k)^2=(2k+2+2k)(2k+2-2k)=2(4k+2)=4(2k+1)$, 所以“神秘数”是 4 的倍数.

(2) 是. 理由如下: 设两个连续的奇数分别为 $2k+1$ 和 $2k-1$ (k 为正整数), 则 $(2k+1)^2-(2k-1)^2=(2k+1+2k-1) \cdot (2k+1-2k+1)=8k=4 \times 2k$,

所以两个连续奇数的平方差是 4 的倍数.

15. 【解】根据第一位同学分解的结果可得 $ax^2+bx+c=2(x-1)(x-9)=2x^2-20x+18$, 所以 $a=2, c=18$. 根据第二位同学分解的结果可得 $ax^2+bx+c=2(x-2)(x-4)=2x^2-12x+16$, 所以 $b=-12$, 所以 $ax^2+bx+c=2x^2-12x+18=2(x^2-6x+9)=2(x-3)^2$.

16. 【解】(1) $x^3+x^2-4x-4=(x^3+x^2)-(4x+4)=x^2(x+1)-4(x+1)=(x^2-4)(x+1)=(x+2)(x-2)(x+1)$.

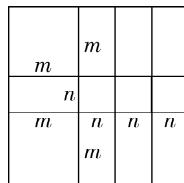
$$(2) y^2+2yz+z^2-9x^2=(y+z)^2-(3x)^2=(y+z+3x)(y+z-3x).$$

17. 【解】(1) ①由题图面积的不同求法, 得 $2m^2+5mn+2n^2=(2m+n)(m+2n)$.

故答案为 $(2m+n)(m+2n)$.

②因为 $2m^2+5mn+2n^2=108, mn=10$, 所以 $m^2+n^2=29$. 因为 $(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$, 所以 $(m+n)^2=49$. 因为 $m+n>0$, 所以 $m+n=7$, 所以题图中所有裁剪线(虚线部分)的长度之和为 $2(m+2n+2m+n)=6(m+n)=6 \times 7=42(\text{cm})$.

(2) 拼凑出的长方形如图所示, 所以 $2m^2+7mn+3n^2=(2m+n)(m+3n)$.



第 12 章 平面图形的认识

12.1 三角形

课时 1 三角形的相关概念

刷基础

1. 【解】(1) $\triangle ABE$ 的三个内角是 $\angle BAE, \angle B, \angle AEB$.

(2) 在 $\triangle ABD$ 中, $\angle B$ 的对边是 AD ; 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 的对边是 AC . 故答案为 AD, AC .

(3) 题图中共有 6 个三角形, 分别是 $\triangle ABD, \triangle ABE, \triangle ABC, \triangle ADE, \triangle ADC, \triangle AEC$.

(4) 线段 AD 是 $\triangle ABD, \triangle ADE, \triangle ADC$ 的公共边.

(5) $\angle ADC$ 是 $\triangle ADE, \triangle ADC$ 的公共角; $\angle AED$